**Вопросы для подготовки к экзамену по дифференциальным уравнениям (3-й семестр)**

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

1.Каков общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка? Что называется его решением? Что такое интегральная кривая?

2.Каков геометрический смысл ДУ y`= f(x,y)? Какой угол наклона имеет интегральная кривая уравнения y`=x2-2y в точке (-1,1)?

3.Что такое изоклины ДУ y`=f(x,y)? Какой угол наклона имеют интегральные кривые уравнения y`=y-x2  в точках параболы y=x2+1?

4.Как выделить области возрастания (убывания) решений ДУ y`=f(x,y)? Как найти их точки экстремума? Сделайте это для уравнения y`=y-x2+2x-2.

5.Как выделить области выпуклости вверх (вниз) решений ДУ y`= f(x,y)? Как найти их точки перегиба? Сделайте это для уравнения y`=y-x2+2x-2.

6.Что такое ДУ семейства кривых? Как найти ДУ семейства кривых y=g(x,C)? Сделайте это для семейства парабол y=Cx2.

7.Что называется углом между гладкими кривыми? Что такое ортогональные траектории семейства кривых? Как получить из ДУ семейства кривых ДУ его ортогональных траекторий? Ответ обоснуйте. Найдите ДУ ортогональных траекторий для семейства парабол y=Cx2.

8.Как формулируется задача Коши для ДУ первого порядка? Каков её геометрический смысл?

9.Сформулируйте теорему существования и единственности для ДУ y`=f(x,y).

10.а) Каков геометрический смысл метода ломаных линий Эйлера? Выпишите алгоритм метода Эйлера.

б) Что называется погрешностью метода Эйлера? Какова точность метода, каковы его достоинства и недостатки?

в)\* Как модифицировать метод Эйлера?

11.а) Каков общий вид ДУ с разделяющимися переменными?

б) В чем состоит разделение переменных?

в)\* При каких условиях задача Коши для уравнения с разделяющимися переменными имеет единственное решение?

12. Какие решения теряются при разделении переменных

а) в уравнении xy`=y(x2+1)?

б) в уравнении xdy-y(x2+1)dx=0?

Ответ обоснуйте, опираясь на теорему существования и единственности.

13. Какие решения теряются при разделении переменных в уравнении y`=2y1/2? Найдите все решения этого уравнения, изобразите интегральные кривые.

14. Как выглядит однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка?

Как свести его к ДУ с разделяющимися переменными? Сделайте это для уравнения y`=(x2-y2)/(x2+y2).

15.а) Каков общий вид линейного ДУ 1-го порядка?

б) Какие методы его решения Вы знаете?

в) При каких условиях задача Коши для линейного ДУ 1-го порядка имеет единственное решение?

16\*) Даны два различных решения линейного ДУ 1-го порядка. Как получить общее решение этого ДУ?

17. Каков общий вид уравнения Бернулли? Какие методы его решения Вы знаете?

18. Для каждого из приведенных ниже ДУ указать тип уравнения и метод его решения:

a) (x+2y)dx –xdy =0; б)xy`-2y=2x4;

в)xy`-y=xtg(y/x); г)y`+ytgx=secx;

д)y`+2y=exy2; е)xy2y`=x2+y3.

2. Дифференциальные уравнения порядка n.

1.Каков общий вид ДУ порядка n? Как формулируется задача Коши для ДУ n-го порядка? Выделить случай n=2 и указать геометрический смысл задачи Коши в этом случае.

2.Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для ДУ y(n)=f(x,y,y`,…,y(n-1)). Каков её геометрический смысл при n=2?

3.Могут ли графики двух решений ДУ на плоскости (Х, У) пересекаться в некоторой точке (х0, у0) для уравнения

а) y`=x+y2? б) y``=x+y2?

4. Могут ли графики двух решений ДУ на плоскости (Х, У) касаться друг друга в некоторой точке (х0 , у0) для уравнения:

а) y`=x+y2? б) y``=x+y2? в)y```= x+y2?

5.Сколько существует решений уравнения y(n)=x+y2 ,удовлетворяющих условиям y(0)=1, y`(0)=2 для n=1,2,3?

6.Как понизить порядок ДУ F(x,y(k),…, y(n))=0? Сделайте это для уравнения xy(5)-y(3)=0.

7. Как понизить порядок ДУ F(y,y`,…,y(n))=0? Сделайте это для уравнения y``+y`2=2e-y.

8. Как понизить порядок ДУ F(x,y,y`,…,y(n-1))=0, если известна интегрируемая комбинация F(…)=dФ/dx? Сделайте это для уравнения xy``+y`-2yy`=0.

9.Для каждого из приведенных ниже дифференциальных уравнений указать способ понижения его порядка:

a) x2y``=(y`)2; б)(y`)2+2yy``=0; в)y``=2yy`;

г)y``(ex+1)+y`=0; д)xy``-y`=x2yy`; е)y4-y3y``=1.

3.Общая теория линейных дифференциальных уравнений.

1.а) Каков общий вид линейного ДУ порядка n? Как ставится для него задача Коши?

б) При каких условиях задача Коши для линейного ДУ n-го порядка имеет единственное решение?

2. В чем состоит принцип суперпозиции для линейного ДУ n-го порядка? Как проявляется этот принцип для линейного однородного уравнения?

3.Дайте определение линейной независимости системы функций на отрезке. Приведите примеры.

4.Что такое определитель Вронского W(t) для системы функций? Чему он равен для системы {1, et, e-t}?

5) а) Пусть W(t) не равняется нулю. Можно ли утверждать, что система функций линейно независима?

б) Пусть система функций линейно независима на отрезке. Верно ли, что W(t) не равен нулю всюду на отрезке? Хотя бы в одной точке отрезка?

в) Система функций линейно зависима на отрезке. Верно ли, что W(t) =0 на этом отрезке? Ответы на вопросы обоснуйте.

6. Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) для линейного однородного ДУ n-го порядка.

а) Сколько ФСР может иметь данное уравнение?

б) Каков критерий ФСР для линейного однородного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами?

7. Какие свойства определителя Вронского для системы решений линейного однородного ДУ с непрерывными коэффициентами Вы знаете?

8.Являются ли решения x1(t), x2(t) уравнения x``+(1/t)x`+(1-1/t2)x=0 линейно зависимыми на положительной полуоси, если известно, что

а) x1(1)=3, x1`(1)=-1, x2(1)=0, x2`(1)=-2?

б) x1(1)=-6, x1`(1)=2, x2(1)=1/3, x2`(1)=-1/9?

9. Как составить линейное однородное дифференциальное уравнение по заданной ФСР? Сделайте это для наборов:

а) {1, cost}; б){t, et}; в) {t,t2,et}.

10. Какова структура общего решения линейного неоднородного ДУ n-го порядка? Что Вы понимаете здесь под термином «общее решение»?

11.Как найти частное решение линейного дифференциального уравнения L(x)=f1(t)+f2(t) по известным решениям уравнений L(x)=f1(t), L(x)=f2(t)?

12.Какие понятия и факты из курса высшей алгебры использовались в теории линейных дифференциальных уравнений ?

4.Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Что называется комплексной экспонентой? Как (по формулам Эйлера) связаны с ней функции sin(t), cos(t)? Каковы основные свойства комплексной экспоненты?

2.а) Каков общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?

б) Как выглядит характеристический многочлен для этого уравнения? Как он используется для решения уравнения?

3.Угадайте ФСР и запишите общее решение для ДУ:

x``=0; x``-x=0; x``-4x=0; x``+9x=0; x``-x`=0; x``+x`=0; x```-x`=0.

4.а) Известна фундаментальная система решений для линейного однородного ДУ 2-го порядка:{e(3+i)t, e(3-i)t}. Как построить вещественную ФСР для этого уравнения?

б) Имеет ли уравнение y``-iy=0 нетривиальные вещественные решения?

5.Как Вы будете искать частное решение уравнения L(x)=f(t)?

1)L(x)=x``-x`-6x; 2)L(x)=x``-6x`+9x; 3) L(x)=x``+9x;

а) f(t)=tet ; б)f(t)=e-2t; в)f(t)=e3it; г)f(t)=cost; д)f(t)=tg2t; е)f(t)=1/sin(2t); ж)f(t)=(t+2)e3t; з)f(t)=t-2et.

Рассмотреть различные сочетания : 1а), 1б),…, 3ж), 3з).

При использовании метода подбора достаточно указать вид решения, не определяя коэффициентов.

При использовании метода вариации постоянных достаточно выписать систему уравнений для нахождения неизвестных функций.

6. Выпишите уравнение гармонических колебаний частоты при наличии вынуждающей силы f(t).

а) Пусть f(t)-периодическая функция с частотой . Чему равна частота собственных колебаний? Какова частота вынужденных колебаний?

б) В чем состоит явление резонанса?

5. Преобразование Лапласа. Операторный метод.

1.Что называется оригиналом? Что такое показатель роста оригинала?

2.Пусть f1(t), f2(t)-оригиналы с показателями роста s1, s2.

а) Будут ли оригиналами f1+f2, f1\*f2, c1f1+c2f2? Что можно сказать о показателях роста этих функций?

б)\*Что произойдет с показателем роста оригинала f(t) при умножении оригинала на t, t3, e2t, e(-2+i)t?

3. Какие из следующих функций являются оригиналами? (Считаем, что при t<0 эти функции равны нулю.)

et, cos(t), tsin(t), e(2-i)t, t2+e-t, et+1/t, -et2 , etlnt, t3e-t, sign(sin(t)).

4. Что называется изображением (преобразованием Лапласа)

F(p) для оригинала f(t)? Для каких значений заведомо определено изображение? Как ведет себя изображение при ?

5. Найдите изображения для следующих оригиналов (считаем, что при t<0 эти функции равны нулю): , cos(

6. Что называется сверткой двух оригиналов? Что означает коммутативность свертки? Будет ли свертка оригиналов снова оригиналом?

7.Пусть f1, f2-оригиналы с показателями роста s1, s2. Как оценить показатель роста свертки f1\*f2? Ответ обоснуйте.

8. Сформулируйте основные свойства преобразования Лапласа:

Линейность; теорема о дифференцировании изображения; теорема смещения изображения; теорема запаздывания оригинала; теорема о дифференцировании оригинала; теорема подобия; теорема о свертке.

9.Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений, найдите изображения для следующих оригиналов: cоs(3t)sin(5t); t sin(4t); et cos(2t).

10. Что называется периодическим оригиналом? Как найти его изображение при помощи интеграла по периоду?

11. Обязаны ли совпадать два оригинала, если совпадают их изображения?

12. а) Как найти оригинал для правильной рациональной дроби? Сделайте это для дробей: .

б) Существует ли оригинал у дроби ? Ответ обоснуйте.

13. В чем состоит операторный метод решения дифференциальных уравнений? Какое значение имеют начальные условия для использования операторного метода?

14. Что такое метод Дюамеля? Как он используется при решении линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?